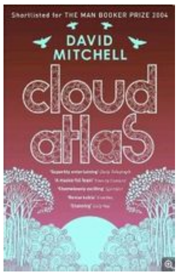
“函数’的云图

--数学文化课堂的一些例证

柳彤上

许多天前看电影《云图》(Cloud Atlas)，那时似懂非懂，不知所云…前两天因为写这篇文章,又一次看了这部电影,温故而知新，竟有些许“收获”一它让我联想到“函数”，一个在数学的世界中无处不在的理念。



《云图》这部电影改编自英国作家大卫·米切尔的同名小说，故事从六个人在不同时空的际遇入手，时间跨越以公元 1850 年为始，一直延伸到后末日时期的未来,看似毫不相干却又环环相扣…因而被誉为有史以来最能挑战读者阅读想象力的小说。米切尔出生于英格兰，大学期间主修英美文学和比较文学。其作品博采众家之所长,自成一派,可谓是波诡云谲，灵气无穷. 2007 年,米切尔以杰出的文学成就被美国《时代》杂志评为“世界 100 位最具影响力的人物”之一。

《云图》写于 2004 年。书中的 6 个人, 6 曲故事; 看似彼此独立，却或是同一幅人性之云图的不同解读。在这里呈现的，则是由那一卷书（或电影）而联想到的函数（Function）理念的一些画片…下面的这 3 个例证，不单单是数学知识的一阕普及和分享，也可作为大学或者中学数学文化课堂的一部分。

例证 1　邂逅百分百

曾在网络上看到一个小游戏，这个游戏的名字是：什么能使生活变得圆满？

其趣味点在于把英文字母与数字相联系，看看会发生点什么？

若令 A, B, C,⋯ X, Y, Z 这 26 个英文字母，分别对应于数字 1, 2, 3, ⋯ 24, 25, 26：

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

那么我们可以有如下有趣的结论：

有人认为努力工作就能使生活变得圆满，是这样吗？

HARD WORK（努力工作）

H＋A＋R＋D＋W＋O＋R＋K＝8＋1＋18＋4＋23＋15＋18＋11＝98

那知识呢？

KNOWLEDGE（知识）

K＋N＋O＋W＋L＋E＋D＋G＋E＝11＋14＋15＋23＋12＋5＋4＋7＋5＝96

那爱情呢？

LOVE（爱情）

L＋O＋V＋E＝12＋15＋22＋5＝54

那好运又如何呢？

LUCK（好运）

L+U+C+K=12+21+3+11=47

可以看到，这些我们通常非常看重的东西都不是最完满的，虽然它们非常重要。那么，究竟什么能使得生活变得圆满呢？

是 MONEY（金钱）吗？ 不！

M+O+N+E+Y=13+15+14+5+25=72

是 LEADERSHIP（领导能力）吗？ 不！

L+E+A+D+E+R+S+H+I+P=12+5+1+4+5+18+19+8+9+16=97

那么，究竟什么能使生活变成 100% 的圆满呢？......

在你“问”遍许多的可能后，竟发现答案其实就在你身边：其回答可以是，

ATTITUDE（心态）！

A+T+T+I+T+U+D+E=1+20+20+9+20+21+4+5=100。

正是我们对待学习、工作、生活的态度能够使我们的生活达到 100%的圆满！

有听过一句话叫：态度决定一切！...假若你是一个懒惰的人，change your attitude，或许你会有拥有一个多彩的人生！

Attitude，一个包含了诸多智慧、热情和创造力的词汇，又可以带给我们多少思考的财富呢？让我们经由上面的数字游戏的余香，来看看还有多少文字的精彩在此隐藏：

按照其上的数字对应，问是否可以找寻到一些相识的英语单词---其数字和是 100？

很有意思的是，Culture 这个单词不经意步入我们的视野。

C + U + L + T + U + R + E = 3 + 21 + 12 + 20 + 21 + 18 + 5 = 100

是的。Culture 这个词汇的魅力或在于它联系着我们的数学文化课堂：Culture，文化。于是课堂间 有许多学生的数学的童真 刹那间被唤起 -- 我们到底会有多少幸运 邂逅多少这样的英文词汇--其和 = 100？

“邂逅百分百”或许是需要缘份的。在我们数学文化课堂间 20 多分钟的实践中，三三两两的同学随意组合计算了许多熟悉的英语单词，可是难得有这样的单词步入我们所期待的空间。比如在我们所相识的一年四季，日月和星期中，唯有 Wednesday 带给我们这样的惊奇：

Wednesday = 23 + 5 + 4 + 14 + 5 + 19 + 4 + 1 + 25 = 100

Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
84	72	95	100	116	63	109

January	February	March	April	May	June
90	96	43	56	39	50
July	August	September	October	November	December
68	89	103	78	94	55
	Spring	Summer	Autumn	Winter	
	83	89	90	89	

那么，若把我们名字的汉语拼音后 经由上面的数字对应 --是否会有哪位同学的名字隐藏着数字和为 100 的惊喜呢 ? 这是我们课堂间关注的第 2 个问题。

我们的课堂中依然没有那样的幸运者... 许多同学在作相关的计算后有一声叹息, 相应他们名字的那个数字和似乎有意地捉弄他们: 不是比 100 多一点, 就是少一点 ˜ .

以下的一些文字则是在课后完工的。历经许多天的等待, 我们有如下的"礼物":

telephone (电话) Styles (风格) discipline (纪律) surely excellent
acknowledge (感激) Roommate designers -设计师 researcher Courses ...
related to 与…有关

相比而言，下面的数字发现让我们有些许惊奇。

毛泽东 MAO ZE DONG: 13 + 1 +15 +26 +5 +4 +15 +14 +7 = 100 !

哈哈，领袖就是领袖，伟人就是伟人，我算了这么多帝王将相只有主席大人是 100。

鲁迅先生笔下的那位"谦谦君子"孔乙己 (kongyiji), 原来竟也与 100 有缘:

Kong yiji = 11 + 15 + 14 + 7 + 25 + 9 + 10 + 9 = 100

回眸处, 上面的数字游戏之所以带给我们数学课堂的心动, 或也在于 26 个英文字母与数字 1 -- 26 的对应是如此的自然, 而其和 100 的选择则符合我们对那一种完美的渴望。这一 game 演绎着现代数学一则"本原的概念" -函数, 而这正是 20 世纪的数学大师 F. Klein 笔下的"数学的灵魂理念"。一一对应是一种独特的函数, 这里的 26 个英文字母与数字 1 -26 间的对应确是这样的一个例证.

经由上面的函数的理念, 我们还可以有如下的一些有趣的数学阅读:

Love vs Friendship

Love = 12 + 15 + 22 + 5 = 54

Friendship = 6 + 18 + 5 + 14 + 4 + 19 + 8 + 9 + 16 = 108

Friendship = 2 Love

--- 这里是否蕴含有几分思维的浪漫呢?

red	orange	yellow	green	-	blue	purple
27	60	92	49	-	40	88

Orange + blue = 100

Yellow + purple – 2 \times blue = 100

--- 这是否也诉说着完美的生活需要七彩的调色板?

... ...

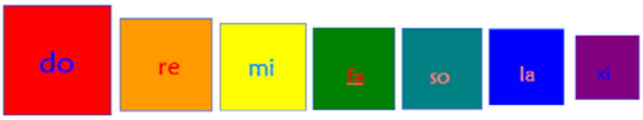
这样的例证或还有许多! 一则很简单的数字游戏，在带给我们思考的快乐的同时，也诉说着如下的心声: 数学文化的芳香，其实弥漫在你我的身边。

例证 2　问问你是谁?

想象在 2014 年的某一天, 作为“人类灵魂建筑师”的你来给一些新同学们上课－比如这个班上有 7 位小朋友:- 他们的名字依次叫

do-re-mi-fa-so-la-xi

若你以如下的模式来认识班上的这些小朋友, 则或许会有一则别样的数学感动 ！



(i) 课前你可设计 3 张含有他们名字的小卡片: (这一游戏的魔术道具，画片形如下)

画片一

画片二

画片三

(ii) 按照他们的意愿，你可以在班上任意选择一位同学，然后告诉说，“ 当你依次向他展示这些画片时，只要他回答这画片中有没有他的存在，即可知道他是谁？”

在这一画片里有你的存在么? 这当可一下子拉近你和这些新同学们的距离，而你的每一回合的成功猜出“***他/她是谁?***”，无疑也带给他们诸多的惊奇和神秘。俗话说, 好的开始将是成功的一半，于是你这堂课的成功也在期待中 ！

注释的楼阁: 缘于课堂情境的不一样，这一游戏或可以一则不一样的模式来阅读，比如数学家史话，偶像的力量，音乐的都市…

(iii) 隐藏在这一游戏中的秘密，简单的说，是“***数的 2 进制*** “ ！

当然, 在游戏之始, 你得先”偷偷地”给这些同学约定一个顺序, 比如

do	*re*	*mi*	*fa*	*so*	*la*	*xi*
1	2	3	4	5	6	7

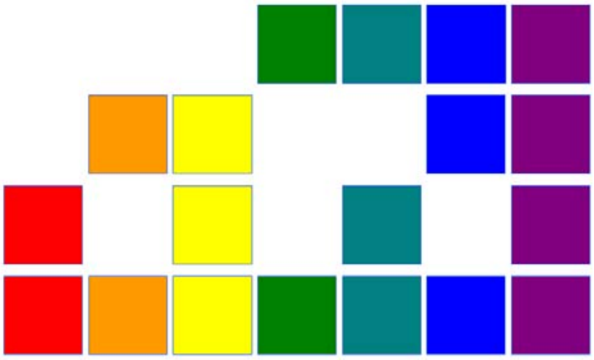
再把这些数字转化为相应的二进制下的数:

$$1=(1)_2, 2=(10)_2, 3=(11)_2, 4=(100)_2, 5=(101)_2, 6=(110)_2, 7=(111)_2$$

而第 i 张卡片上的这些名字恰是在相应的二进制下 i-位数是 1 的那些名字．比如在我们上面的设计中第 1 张卡片上的名字是

do	*re*	*mi*	*fa*	*so*	*la*	*xi*
$(1)_2$		$(11)_2$		$(101)_2$		$(111)_2$

:

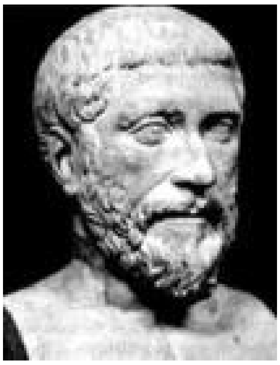


而为了猜出那个同学叫什么名字，你只要心中把他回答”有”的那些卡片-相应的数字加起来，再一一对应到事先约定的名字即可．比如同学 Q 的回答是，在画片一上”有”，在画片二上”有”，在画片三上”没有”，则你可经由 $(011)_2 = 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1 = 3$ 可知那位同学的名字叫 mi .

这里有 3 个回合”一一对应”的运用：名字-数字，数的“10 进制”和“二进制”间的转化，数字-名字，函数的魅力由此可见 ！

隐藏在其上两个游戏中的哲思正是，函数之云图中的 “一一对应”曲…相比而言，接下来的这个例证比较的不简单…因为其缘自”无限的星空” ~

例证 3　超越数在何处



回眸处，无理数的发现可追溯到古希腊的毕达哥拉斯时代。在毕达哥拉斯学派的理念之阁里,数是万物之母--整个世界上物质的，形而上学的一切，都是建立在 1, 2, 3, … 的离散模式之上的；音乐的和声，天空中的旋律都是整数的简单比例。换句话说,有理数统治着希腊人的 Logos !

我们都知道，毕达哥拉斯定理是他们这一学派最伟大的数学发现，然而正是这一最伟大的发现颠覆了其“ 有理数就是一切”的哲学信念，这是数学之旅中很有趣的现象。

经由毕达哥拉斯定理，单位正方形对角线的长 $=\sqrt{2}$，这是一个无理数，此即

$$\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}, \forall \quad m,n \in \mathbb{N}$$

换句话说，$\forall \quad l(x) := mx - n, (m,n \in \mathbb{N}) \quad \text{s.t.} \quad l(\sqrt{2}) \neq 0$.

但我们可以如下的模式来刻画”其无理性”：存在有 2 次的整系数多项式

$$f(x) := x^2 - 2 \quad \text{s.t.} f(\sqrt{2}) = 0.$$

又比如 $\sqrt[3]{3}$，它的无理性程度或比 $\sqrt{2}$ 略高,

$$\forall \quad Q(x):=qx^2+mx-n,(q,m,n\in\mathbb{Z}) \quad \text{s.t.} \quad Q(\sqrt[3]{3})\neq 0$$

然而存在有 $f(x):=x^3-3$ s.t. $f(\sqrt[3]{3})=0$.

形如上的（无理或有理）数可名之曰代数数。某种意义上，这些数的“无理性”可经由某个代数多项式来刻画！否则，则是超越数：

一个实数 I 称为超越的，如若不存在整系数的多项式 $f(x)$,

$$f(x):=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0\in\mathbb{Z}[x], \text{s.t. } f(I)=0.$$

在数学的故事之旅中，早在 1750 年前后就出现超越数的概念（它最初出现在 Euler 的《无穷小分析引论》》中）, 但直到 1850 年前后,法国数学家刘维尔(J. Liouville, 1809-1882)才构造出第一个超越数:

$$\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\frac{1}{10^{4!}}+\frac{1}{10^{5!}}+\frac{1}{10^{6!}}+\ldots$$

这或多或少有点美中不足, 因为这个数的人工制作的痕迹有点浓. 20 多年后, 超越数故事的续篇由法国数学家厄尔米特(C.Hermite,1822-1901)和德国数学家林德曼(Lindemann, 1852-1939)谱写, 他们分别于 1873 年和 1882 年证明 e 和 π 的超越性, 这在数学上有着里程碑的意义.

虽如此,上面的这些例证只是超越数印象中的个案…超越数的传奇由德国数学家康托尔(G. F. Cantor, 1845-1918) 绘就。他以其思维之独特，丰富的想象力和新颖的方法绘制了一幅人类智慧的精品---集合论和超穷数理论，令 19、20 世纪之交的整个数学界、甚至哲学界感到震惊。按照伟大的数学家希尔伯特(D.Hilbert,1862-1943)的口吻, “从康托尔所创造的伊甸园中—在其神奇的无限王国”蕴含有一个让人惊奇的结论: 所有代数数的个数和自然数的个数”**一样多**”, 而实数则比自然数”**多的多**”…经由此,可演奏出这样的美妙笛声:**超越数不仅存在,且比代数数多的多**。这里的”**一样多**”正是康托尔的独特想象力之所在: 他指的是,两个集合间可以建立” 一一对应”; 且证明了在自然数集 $\mathbb{N}$ (它是 $\mathbb{R}$ 的一个真子集) 和实数集 $\mathbb{R}$ 之间则找不到这样的函数(一一对应). 在这里, 我们又一次看到” **函数**” 理念的神奇力量 !

是的, 超越数不仅存在, 且比代数数” 多的多” 。即使在无限的王国,我们也可以畅谈谁比谁多…还是 E.T.贝尔(20 世纪著名的数学史家,著有《Men of Mathematics》一书)说的好: 点缀在 $\mathbb{R}$ 上的代数数犹如夜空中的繁星;而沉沉的夜空则由超越数构成…

然而, 缘何我们邂逅一枚超越数却是如此的难? ... Is π^e, π^π, e^e ... transcendence?

… …

形如上的例证,可以有许多许多-其如一篇篇”函数的云图”, 绘出数学故事七彩的星空!